



**PEPS Interactions INS2I :**  
**APPEL À PROJETS EXPLORATOIRES 2011**

**Titre long du Projet (maximum 150 caractères) :**

Sage-Combinat : fédérer et mutualiser le développement logiciel pour la recherche en combinatoire

**Titre court du Projet :**

Sage-Combinat

**Mots clés (choix libre) :**

Combinatoire, combinatoire algébrique, combinatoire énumérative, combinatoire des mots, calcul symbolique, exploration informatique, systèmes dynamiques.

**Résumé du Projet (maximum 10 lignes) :**

Ce projet réunit plusieurs équipes de chercheurs en combinatoire, à l'interface mathématique-informatique. Chaque équipe, au sein de sa thématique propre, a un fort besoin de calculs sophistiqués qui influencent directement la résolution de grands problèmes mathématiques. L'objectif de ce PEPS est de permettre à ces équipes de mutualiser une grande partie de leurs efforts de développement, grâce à une architecture logicielle commune innovante.

Plus généralement, ce PEPS contribuera à l'élargissement rapide de la communauté autour du projet logiciel Sage-Combinat dont la mission est d'« améliorer la plateforme de calcul mathématique généraliste libre Sage comme boîte à outil extensible pour l'exploration informatique en combinatoire, en fédérant et mutualisant les efforts de développements des chercheurs ».

<b>Porteur du projet</b>	Nom du laboratoire	Courriel	Code postal, ville
Mr Nicolas M. Thiéry	Laboratoire de Mathématiques d'Orsay	Nicolas.Thiery@u-psud.fr	91405 Orsay Cedex
<b>Participants</b>	Nom des laboratoires	Courriel	Code postal, ville
Mr Nathann Cohen	Laboratoire d'Informatique, Signaux et Systèmes de Sophia-Antipolis	nathann.cohen@sophia.inria.fr	06902 Sophia Antipolis
Mr Vincent Delecroix	Institut de Mathématiques de Luminy	vincent.delecroix@iml.univ-mrs.fr	13288 Marseille
Mr Florent Hivert	Laboratoire d'Informatique, de Traitement de l'Information et des Systèmes	florent.hivert@univ-rouen.fr	76801 Saint Étienne du Rouvray
Mr Sébastien Labbé	Laboratoire d'Informatique Algorithmique : Fondements et Applications	sebastien.labbe@liafa.jussieu.fr	75205 Paris
Mr Samuel Lelièvre	Laboratoire de Mathématiques d'Orsay	samuel.lelievre@u-psud.fr	91405 Orsay Cedex
Mr Thierry Monteil	Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier	thierry.monteil@lirmm.fr	34095 Montpellier
Mr Cyril Nicaud	Laboratoire d'informatique Gaspard-Monge	cyril.nicaud@univ-mlv.fr	77454 Marne-la-Vallée
Mme Carine Pivoteau	Laboratoire d'informatique Gaspard-Monge	carine.pivoteau@univ-mlv.fr	77454 Marne-la-Vallée
Mr Yann Ponty	Laboratoire d'Informatique de l'X	yann.ponty@lix.polytechnique.fr	91128 Palaiseau

## Moyens demandés en Euros HT :

Durée du projet	Équipement	Fonctionnement	Total
24 mois	4k€	16k€	20k€

Le rôle de ce PEPS est principalement de financer des rencontres :

- séjours croisés de quelques jours entre les membres de l'équipe ;
- invitations d'experts internationaux ;
- rencontres de développeurs sur des thèmes spécifiques (par ex. génération aléatoire) ;
- rencontres internationales annuelles d'une semaine (Sage Days), orientée en particulier vers les doctorants du GDR-IM, avec comme objectif principal de recruter de nouveaux contributeurs.

Avis du directeur du laboratoire

# Exposé scientifique du projet

Depuis son introduction par Schützenberger dans les années 1950, l’exploration informatique a traditionnellement joué un rôle essentiel dans la recherche en combinatoire ; pour cela des efforts considérables de développement ont été consentis, résultant en de multiples logiciels. Les besoins de recherche actuels requièrent des calculs de plus en plus sophistiqués, et en particulier mettant simultanément en œuvre une grande diversité d’objets combinatoires (partitions, permutations, arbres, graphes, treillis, mots, monoïdes, automates, pavages, réseaux, etc.) et d’outils (séries génératrices, algèbre linéaire, et calcul symbolique en général, génération exhaustive et aléatoire, optimisation combinatoire, algorithmique des groupes et des monoïdes, etc.). De plus, de nombreuses démonstrations reposent maintenant sur des calculs sur ordinateur.

Cela appelle **un projet logiciel fédérateur mutualisant les efforts de développement de toute la communauté**, tel que GAP le fait pour la théorie des groupes. Par nature, un tel projet doit être **libre** afin d’encourager le partage et permettre la revue par les pairs. **L’objectif de ce PEPS est de contribuer à l’émergence d’un tel projet logiciel, et de soutenir la participation de la communauté française à son élaboration.**

Hivert et Thiéry ont initié les prémises de ce projet en 2000 sous le nom de MuPAD-Combinat (maintenant Sage-Combinat, <http://combinat.sagemath.org>). Le succès rencontré (50 contributeurs, 70 publications) et l’expertise acquise montrent que la démarche est viable et l’élargissement à toute la combinatoire possible, sinon nécessaire.

Une opportunité essentielle est la montée en puissance rapide depuis 2006 de la plateforme de calcul mathématique généraliste Sage (<http://www.sagemath.org/>) dont la mission est de « fournir une alternative libre à Magma, Maple, Mathematica et Matlab ». Cette réussite est due aux choix stratégiques innovants suivants : Ancré sur la recherche, Sage est développé par une large communauté internationale (plus de 250 contributeurs), transversalement aux institutions, grâce aux outils modernes de développement collaboratif. Il est basé sur un langage de programmation moderne, flexible et largement répandu (Python), et agrège les meilleures bibliothèques spécialisées libres de mathématique (une centaine de composants dont GAP, Maxima, ATLAS, LinBox, ...). À partir de ceux-ci, Sage construit un environnement polyvalent permettant d’exprimer naturellement les concepts et algorithmes mathématiques, grâce à une utilisation avancée des outils de modélisation informatique (objets, polymorphisme, coercion, ...).

Ce PEPS transversal recouvre un large spectre des thématiques de recherche en combinatoire. Il réunit des chercheurs qui se sont rencontrés à l’occasion de journées Sage, en particulier lors du mois thématique Math-Info au CIRM en Février 2010. Ils ont alors pu constater qu’au-delà de leurs divergences thématiques existaient de nombreux besoins communs en outils de calculs. Des collaborations concrètes sont déjà en cours au sein de Sage-Combinat, et nécessitent des moyens qui leur permettraient de renforcer et d’élargir leur communauté.

## Objectifs Scientifiques

Voici, en quelques mots, quelques-uns des projets de recherche qui bénéficieront directement des développements logiciels de ce PEPS :

- **Combinatoire algébrique** : Généralisation de la notion de série génératrice par les algèbres de Hopf combinatoires ; application à l’analyse d’algorithme, à la resommation des séries divergentes en mathématique, à la renormalisation en théorie quantique des champs, et à la théorie des représentations des algèbres de Hecke et des monoïdes (en particulier, Diagramme de Bratteli de tours d’algèbres) (ancien Projet ANR *HopfCombOP* et projet PEPS *Calcul Moulieu*, projet NSF-FRG *Affine Schubert Calculus*) ; Hivert, Thiéry.

- **Combinatoire analytique** : Les générateurs de Boltzmann pour les espèces, le calcul de l'oracle de Boltzmann, les générateurs paramétrés, génération par chaînes de Markov (liens avec l'algèbre linéaire). Applications, pour des distributions d'entrées réalistes, à l'analyse d'algorithmes notamment en test logiciel et en bio-informatique (ancien projet ANR *GAMMA*, projet ANR *MAGNUM*, PEPS prométéines) ; Nicaud, Pivoteau, Ponty.
- **Combinatoire des mots et des graphes, dynamique symbolique** : Cohen, Delecroix, Labbé, Lelièvre, Monteil.

À titre d'exemple, nous détaillons ce dernier projet. Certains systèmes dynamiques appartenant à un monde profondément non-dénombrable peuvent néanmoins s'étudier au travers d'objets combinatoires les représentant. Il s'agit en général plus d'un plongement graduel dans leur structure que d'une discrétisation numérique.

Par exemple, la trajectoire d'une boule de billard dans un polygone rationnel peut être représentée par la suite des côtés rencontrés, fabriquant ainsi un *mot infini*. On comprend le *langage* du mot obtenu à l'aide d'une suite de *graphes* (de Rauzy) qui tiennent compte des échelles de plus en plus grandes. L'évolution de ces graphes correspond donc à un zoom progressif dans la structure du langage, les éclatements des embranchements donnent lieu à une composition infinie de *substitutions* (système  $S$ -adique, diagramme de Bratteli) qui engendre le langage. D'un point de vue plus global, la table de billard peut être associée à une surface de translation, c'est un point dans le fibré tangent de l'espace des modules des courbes de genre  $g$  : la suite de substitutions évoquée plus haut correspond à la géodésique dont le vecteur tangent initial est la table de billard étudiée. Aussi, cet espace est régulièrement quadrillé par les surfaces arithmétiques (comme les réels le sont par les rationnels), qui admettent une représentation combinatoire simple : un couple de *permutations*. On peut sauter d'une surface arithmétique à une autre par l'action de générateurs de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , chaque orbite donne lieu à un graphe (fini), dont les propriétés d'expansion (conjecturées par McMullen) sont en lien étroit avec le spectre du laplacien.

Les conjectures formulées au milieu des années 1990 par M. Kontsevich et A. Zorich sur le spectre de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich ont été inspirées par une expérimentation intensive au cours des années précédentes. De nombreux résultats importants ont suivi ces conjectures (Forni, Avila-Viana, ...). Les expérimentations continuent. Nous développons actuellement au sein de Sage autour des questions suivantes :

- Propriété d'expansion des groupes de Veech et spectre du laplacien.
- Classification des orbites des surfaces arithmétiques.
- Algorithme d'approximation des exposants de Lyapunov pour les mesures géométriques.
- Simplicité du spectre de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich.
- Calcul de la complexité globale des échanges d'intervalles.
- Spectre de Lyapunov des mots d'Arnoux-Rauzy.

**Mots clefs** : combinatoire des mots, graphes, pavages, plans discrets, échanges d'intervalles, surfaces de translation, diagrammes de Bratteli.

Tous ces projets utilisent un socle commun important de structures combinatoires (mots, permutations, graphes, séries génératrices, ...) qui seront au cœur de notre collaboration. En particulier, la **génération aléatoire et exhaustive** de telles structures est un point qui nous rassemble dans la découverte de phénomènes et la recherche de contre-exemples.