

# Jours Sage au LaCIM

## Démonstration de l'outil sagetex

Sébastien Labbé

14 juillet 2009

Dans ce document, nous utilisons l'outil sagetex en illustrant des exemples de l'algèbre linéaire, du calcul ainsi que des graphes.

### 1 Algèbre linéaire

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$ . Faisons quelques calculs sur la matrice  $A$ .

$\det(A)$	0
$\chi_A(x)$	$x^4 - 30x^3 - 80x^2$
$m_A(x)$	$x^3 - 30x^2 - 80x$
Forme échelonnée	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Diviseurs élémentaires	[1, 4, 0, 0]

On vérifie que le polynôme minimal de  $A$  s'annule bien en  $A$ , c'est-à-dire

$$m_A(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant  $B = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 \end{pmatrix}$ . Le produit de  $A$  par  $B$  est

$$\begin{pmatrix} 152 & 158 & 164 & 170 \\ 504 & 526 & 548 & 570 \\ 856 & 894 & 932 & 970 \\ 1208 & 1262 & 1316 & 1370 \end{pmatrix}.$$

## 2 Calcul

### 2.1 Racines

On désire étudier la fonction  $\chi_A(x) = x^4 - 30x^3 - 80x^2$ . Commençons par tracer le graphe de ce polynôme dans l'intervalle  $[-3, 1]$ .

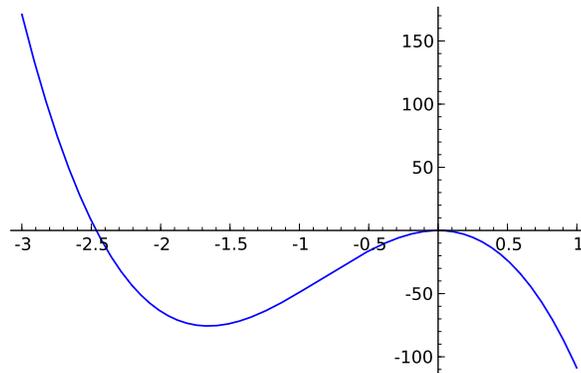


FIGURE 1 – La fonction  $\chi_A(x)$ .

```
r1,r2,r3 = chi.real_roots()
```

Un simple calcul dans Sage nous donne les racines réelles de  $\chi_A(x)$  qui sont  $-2.46424919657298$ ,  $0.0000000000000000$ ,  $32.4642491965730$  et  $32.4642491965730$ . Ceci nous indique que le graphe précédent a négligé une racine du polynôme comme le confirme le graphe suivant.

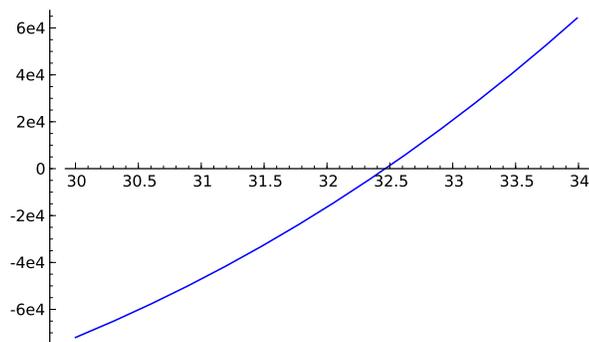


FIGURE 2 – La fonction  $\chi_A(x)$ .

### 2.2 Calcul différentiel et intégral

On s'intéresse aussi à la dérivée et l'intégrale de  $\chi_A(x)$  par rapport à  $x$ . On obtient facilement (surtout avec sagetex!) que

$$\frac{d}{dx}\chi_A(x) = 4x^3 - 90x^2 - 160x$$

et que

$$\int \chi_A(x)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{15}{2}x^4 - \frac{80}{3}x^3.$$

## 2.3 Limites

Calculons quelques limites avec Sage :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

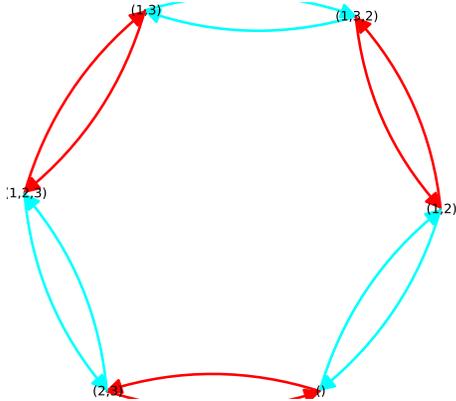
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

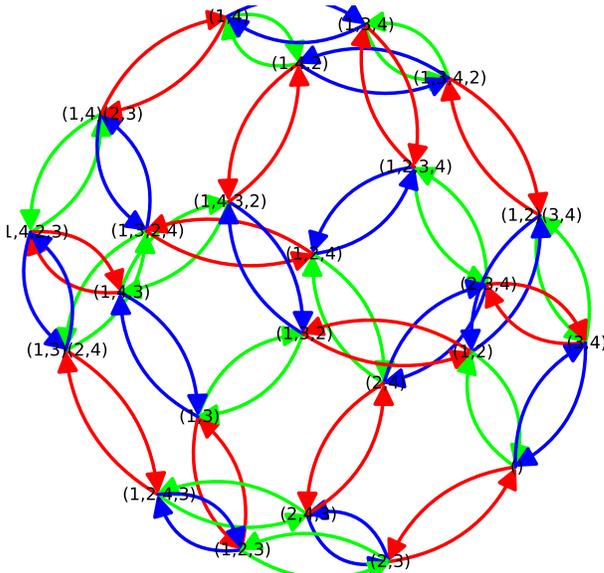
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

### 3 Graphes

Ici, on s'intéresse au graphe de Cayley du groupe symétrique d'ordre 3. Les couleurs des arêtes du graphe correspondent aux générateurs suivants :  $[(1, 2, 3), (1, 2)]$ .



Ici, on s'intéresse au graphe de Cayley du groupe symétrique d'ordre 4. Les couleurs des arêtes du graphe correspondent aux générateurs suivants :  $[(1, 2, 3, 4), (1, 2)]$ .



### 4 À propos de sagetex

On peut obtenir plus d'information sur sagetex en consultant la documentation disponible dans l'arborescence de sage : `sage-4.1/examples/latex_embed/sagetexpackage.pdf`.

Présentement, sagetex est un paquetage optionnel à Sage. On peut l'installer en faisant `sage -i sagetex-2.1.1` dans la ligne de commande (la version de sagetex peut changer. Si c'est le cas, un message d'erreur vous indiquera comment connaître le nom de la version de sagetex la plus récente.)

### Références

- [1] Stein, W. 2009. *Sage : Open Source Mathematical Software (Version 4.1)*, The Sage Group, [www.sagemath.org](http://www.sagemath.org).
- [2] Drake, D. 2009. Le paquetage sagetex, <http://www.ctan.org/tex-archive/help/Catalogue/entries/sagetex.html>