Arch. Math., Vol. 66, 378–387 (1996)

0003-889X/96/6605-0378 $ 3.50/0

Sur les revêtements de Schottky des courbes modulaires de Drinfeld

Par

MARC REVERSAT

Introduction. Soit $\mathscr{C}$ une courbe projective et lisse, géometriquement irréductible sur $\mathbb{F}_q$ (corps fini á q éléments, de caractéristique p), soient ∞ un point fermé de $\mathscr{C}$, K le corps des fonctions rationnelles sur $\mathscr{C}$, $A = \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C} - \{\infty\})$ le sous-anneau de K des fonctions régulières en dehors de l'∞, K_∞ le complété de K à la place ∞ et C le complété d'une clôture algébrique de K_∞. On appelle «demi-plan» de Drinfeld (ou «demi-plan» algébrique) l'ensemble ([3], [2])

$$\Omega = \mathbb{P}^1_C(C) - \mathbb{P}^1_C(K_\infty) = C - K_\infty .$$

C'est un espace analytique rigide sur C muni d'un recouvrement pur (cf. (0.2)), la réduction analytique associée $\tilde{\Omega}$ est un arbre de $\mathbb{P}^1_{\bar{K}_\infty}$ se coupant en des points doubles ordinaires rationnels sur $\bar{K}_\infty$ (le corps résiduel de K à la place ∞), le graphe d'intersection de cette réduction analytique s'identifie canoniquement à l'arbre de Bruhat-Tits τ de $GL_2(K_\infty)$ ([5] ch. 5, [8] § 1).

Soit Γ un sous-groupe arithmétique de $GL_2(K)$ (cf. (0.3)), alors Γ opère par homographies sur Ω, cette action respecte le recouvrement pur, par suite Γ agit sur la réduction analytique $\tilde{\Omega}$ et (avec un choix convenable de l'action de $GL_2(K_\infty)$ sur τ, [8] § 1) l'isomorphisme entre son graphe d'intersection et l'arbre de Bruhat-Tits est Γ-équivariant. Grâce à ce que l'on appelle aujourd'hui les «modules de Drinfeld» (et qu'il introduisit sous le nom de «modules elliptiques»), Drinfeld prouva que le C-espace analytique $M_\Gamma = \Gamma\backslash\Omega$ est en fait une courbe algébrique affine (souvent définie sur A, [3]). Son complété, $\bar{M}_\Gamma$, s'appelle une courbe modulaire de Drinfeld (pour plus de détails, voir par exemple [2], [7]). Le recouvrement analytique de Ω, modulo Γ, fournit un recouvrement pur de M_Γ, la réduction analytique $\tilde{M}_\Gamma$ associée est $\Gamma\backslash\tilde{\Omega}$, le graphe d'intersection de cette réduction est canoniquement $\Gamma\backslash\tau$. On voit alors que $\bar{M}_\Gamma$ est une courbe de Mumford sur C ([11]; nous adoptons ici le point de vue de [9], cf. ch. 4, (3.10) et aussi ch. 5, § 5), c'est à dire qu'il existe un sous-groupe G de $GL_2(C)$, libre à g générateurs (g est le genre de $\bar{M}_\Gamma$) agissant (par homographies) de manière discontinue sur $\mathbb{P}^1_C(C)$ ([9], ch. 1, § (1.3)) tel que, si $\mathscr{L}$ désigne l'ensemble de ses points limites (op. cit.) et Ξ l'espace analytique $\mathbb{P}^1_C(C) - \mathscr{L}$, alors on a un isomorphisme d'espaces analytiques (complets, par suite de courbes algébriques) $\bar{M}_\Gamma \cong G\backslash\Xi$. La groupe G est dit de Schottky ([11]; [9] ch. 1, (1.6) et (3.1)). Dans cet article nous dirons que *le couple* (Ξ, G) *est un revêtement de Schottky de* $\bar{M}_\Gamma$. Remarquons que (Ω, Γ) *n'est pas un revêtement de Schottky* de $\bar{M}_\Gamma$, d'ailleurs, Γ n'est pas de type fini (c'est une conséquence de [15], ch. 2, coroll. du th. 10, p. 159) et $\Gamma\backslash\Omega$ n'est pas une courbe complète (car sa réduction analytique a pour graphe $\Gamma\backslash\tau$ qui n'est pas fini, cf. [15], ch. 2, th. 9, p. 143). Dans [12] il est prouvé que le groupe de Schottky G est isomorphe à $\Gamma/\Gamma_{\text{tors}}$, le quotient de Γ par le sous-groupe engendré par ses éléments de torsion; une construction de Ξ a été annoncée dans [14].

Dans le paragraphe 1 nous construisons un *sous-groupe* G de Γ, libre à g générateurs (g est le genre de $\bar{M}_\Gamma$, supposé au moins égal à 1), tel que Γ soit le produit semi-direct de G et de Γ_{tors} (th. (1.4)). Dans le paragraphe 2 nous construisons explicitement un espace analytique Ξ tel que (Ξ, G) soit un rêvetement de Schottky de $\bar{M}_\Gamma$, plus précisément, nous mettons en évidence un diagramme commutatif d'espaces et de morphismes C-analytiques (th. (2.7)).

$$
\begin{array}{ccc}
\Omega & \longrightarrow & \Xi \\
{\scriptstyle\text{can.}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{can.}} \\
\Gamma\backslash\Omega & \hookrightarrow & G\backslash\Xi \\
\Vert\downarrow & & \downarrow\wr \\
M_\Gamma & \hookrightarrow & \bar{M}_\Gamma
\end{array}
$$

Il semble que la construction de revêtement de Schottky (Ξ, G) de $\bar{M}_\Gamma$, en particulier le diagramme du théorème (2.7), doive donner quelques applications intéressantes, comme par exemple de traduire aisément les résultats de [4] (voir aussi [13]) et ainsi d'obtenir une classification des fibrés vectoriels semistables de degré 0 sur $\bar{M}_\Gamma$ (de genre $g \geqq 1$) par certaines représentations du groupe arithmétique Γ.

Nous remercions l'éditeur, dont les remarques ont permis à cet article de gagner en clarté.

0. Notations et rappels. (0.1) La lettre K désigne un corps global de caractéristique positive, c'est à dire le corps des fonctions rationnelles d'une courbe $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{F}_q$ (corps fini à q éléments, de caractéristique p), projective, lisse et géométriquement irréductible; on désigne par ∞ une place de K, c'est à dire un point fermé de $\mathscr{C}$, non nécessairement rationnel sur $\mathbb{F}_q$ et soit $A = \mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C} - \{\infty\})$ l'anneau des fonctions rationnelles sur $\mathscr{C}$ régulières en dehors de l'∞. On note K_∞ le complété de K à la place ∞ et C le complété d'une clôture algébrique de K_∞. On désigne par $|\,.\,|$ la valeur absolue (à l'∞) de K, K_∞ et C, par π une uniformisante de K_∞, par $\mathcal{O}_\infty$ l'anneau de valuation de K_∞ et par $\bar{K}_\infty$ le corps résiduel de K_∞ (que l'on suppose inclus dans K_∞). Pour ces données le «demi-plan» de Drinfeld est

$$\Omega = \mathbb{P}^1_C(C) - \mathbb{P}^1_C(K_\infty) = C - K_\infty .$$

(0.2) Pour les généralités de géométrie analytique rigide nous renvoyons à [9], [5] et [1]. Rappelons quelques propriétés de Ω que l'on peut trouver dans [2], [5] ch. 5, [8] § 1. Le demi-plan de Drinfeld a une structure d'espace analytique rigide sur C donnée par le recouvrement suivant. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ soit D_n l'ensemble des $z \in \Omega$ tels que

$$|\pi|^{n+1} \leqq |z| \leqq |\pi|^n, \quad |z - c\pi^n| \geqq |\pi|^n, \quad |z - c\pi^{n+1}| \geqq |\pi|^{n+1}\ \forall c \in \bar{K}_\infty^*.$$

On pose pour $x \in K_\infty$: $D_{(n,x)} = x + D_n$. On a

$$(D_{(n,x)} = D_{(n',x')}) \Leftrightarrow (n = n' \text{ et } |x - x'| \leqq |\pi|^{n+1}).$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ soit S_n un système de représentants dans K_∞ de $K_\infty/\pi^n K_\infty$. Soit $I = \{(n, x)/n \in \mathbb{Z}, x \in S_{n+1}\}$. Alors

(0.2.1) $(D_i)_{i \in I}$ est un recouvrement pur de Ω.

La réduction analytique $\tilde{\Omega}$ donnée par ce recouvrement pur est un arbre de $\mathbb{P}^1_{\bar{K}_\infty}$, infini, de valence $q_\infty + 1$ (q_∞ désigne le cardinal de $\bar{K}_\infty$), se coupant en des points doubles ordinaires rationnels sur $\bar{K}_\infty$. Le graphe d'intersection de $\tilde{\Omega}$ est canoniquement isomorphe à l'arbre de Bruhat-Tits, τ, de $GL_2(K_\infty)$, on confondra souvent ces deux graphes.

(0.2.2) $GL_2(K_\infty)$ opère sur Ω (par homographies), sur le recouvrement $(D_i)_{i \in I}$, donc sur $\tilde{\Omega}$ et sur son graphe d'intersection; l'isomorphisme entre ce graphe et l'arbre de Bruhat-Tits τ est $GL_2(K_\infty)$-équivariant, pour une action de $GL_2(K_\infty)$ convenable sur τ.

(0.2.3) Pour tout $z \in \Omega$ on pose $|z|_i = \inf\{|z - \lambda|/\lambda \in K_\infty\}$, c'est toujours un minimum, atteint par un élément de K.

(0.3) Soit Γ un sous-groupe de $GL_2(K)$, on le dit arithmétique si, identifiant $GL_2(K)$ et $GL(K^2)$, il existe un sous-A-module M de K^2, projectif de rang 2 et un idéal $I \neq (0)$ de A tels que $GL(I, M) \subseteqq \Gamma \subseteqq GL(M)$, où $GL(M) = \{\gamma \in GL_2(K)/\gamma(M) = M\}$ et où $GL(I, M)$ est le noyau de l'application canonique $GL(M) \to GL(M/IM)$.

(0.3.1) Etant donné un tel sous-groupe on désigne par Γ_{tors} (resp. $\bar{\Gamma}$) le sous-groupe de Γ engendré par ses éléments de torsion (resp. l'abélianisé de Γ quotienté par son sous-groupe de torsion). Le rang de $\bar{\Gamma}$ (en tant que $\mathbb{Z}$-module) sera appelé le rang de Γ.

(0.3.2) *Dans tout cet article on suppose que le rang g de Γ vérifie $g \geqq 1$.*

(0.4) Pour les généralités sur les graphes nous renvoyons à [15], ch. 1. Le mot arête signifiera toujours une arête orientée (nous ne considérons pas d'arête géométrique); si e est une arête, $o(e)$ (resp. $t(e)$) désignera son origine (resp. son sommet terminal). Si $\mathscr{G}$ est un graphe on notera $\operatorname{ar}(\mathscr{G})$ (resp. $\operatorname{som}(G)$) l'ensemble de ses arêtes (resp. de ses sommets).

(0.4.1) Précisions que si $\mathscr{G}$ est un graphe, si $\mathscr{H}$ est un sous-graphe de $\mathscr{G}$, on apellera complémentaire de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{G}$ le sous-graphe $\mathscr{H}'$ de $\mathscr{G}$ tel que $\operatorname{ar}(\mathscr{H}') = \operatorname{ar}(\mathscr{G}) - \operatorname{ar}(\mathscr{H})$; ainsi, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ peuvent avoir des sommets communs.

(0.5) Soit Γ un sous-groupe arithmétique de $GL_2(K)$. Alors $M_\Gamma := \Gamma \backslash \Omega$ est un espace analytique rigide muni du recouvrement pur «$(D_i)_{i \in I}$ modulo Γ»; le graphe de la réduction analytique $\tilde{M}_\Gamma$ relative a ce recouvrement est $\Gamma \backslash \tau$ (après l'identification de celui de $\tilde{\Omega}$ avec τ).

(0.5.1) Le graphe de $\Gamma \backslash \tau$ est connexe, il est la réunion d'un graphe fini connexe sans bouts, noté $(\Gamma \backslash \tau)^\circ$, et d'un nombre fini de demi-droites infinies, disjointes, appelées pointes de Γ ou de $\Gamma \backslash \tau$ (cf. [15], th. 9, p. 143).

(0.5.2) Les sous-arbres de τ qui, par le morphisme canonique $\tau \to \Gamma\backslash\tau$, sont isomorphes à une pointe de Γ à un graphe fini près, sont rationnels sur K, i.e. sont de la forme b_D, comme dans [15], prop. 10, p. 147. Inversement, tout bout de τ rationnel sur K a pour image dans $\Gamma\backslash\tau$ une pointe à un graphe fini près. Les pointes de $\Gamma\backslash\tau$ sont ainsi en bijection avec $\Gamma\backslash\mathbb{P}^1(K)$ (pour plus de détails voir op.cit., aussi [8] §(1.6) et (2.6)).

(0.5.3) Le groupe $\bar{\Gamma}$ et le groupe d'homologie $H_1(\Gamma\backslash\tau, \mathbb{Z})$ sont isomorphes ([15], coll. 4, p. 171; voir aussi [8] §(3.2)), donc le nombre de cycles minimaux de $(\Gamma\backslash\tau)^\circ$ est g, le rang de Γ.

(0.5.4) Le C-espace analytique $M_\Gamma := \Gamma\backslash\Omega$ est une courbes affine ([3]), son complété $\bar{M}_\Gamma$ est une courbe projective sur C, lisse, appelée courbe modulaire de Drinfeld ([3], [2], [7]). La courbe $\bar{M}_\Gamma$ est de genre g, le rang du groupe arithmétique Γ (et aussi celui du $\mathbb{Z}$-module $H_1(\Gamma\backslash\tau, \mathbb{Z})$).

1. «Bases géométriques» des groupes arithmétiques. (1.1) Soient donc τ l'arbre de Bruhat-Tits de $GL_2(K_\infty)$, Γ un sous-groupe arithmétique de $GL_2(K)$ et $\tilde{P}$ la réunion des pointes de $\Gamma\backslash\tau$. Soit $(\Gamma\backslash\tau)^\circ$ les sous-graphe de $\Gamma\backslash\tau$ complémentaire de $\tilde{P}$. On désigne par $u: \tau \to \Gamma\backslash\tau$ l'application canonique et soit T un sous-arbre connexe de τ qui relève un sous-arbre maximal $\tilde{T}$ de $(\Gamma\backslash\tau)^\circ$ (ainsi T et $\tilde{T}$ sont isomorphes par u). Alors, $\mathrm{ar}(\Gamma\backslash\tau)^\circ - \mathrm{ar}(\tilde{T})$ est un ensemble $\{\pm\tilde{e}_1, \ldots, \pm\tilde{e}_g\}$ de $2g$ arêtes (orientées), où g désigne le rang de Γ et où l'on suppose que l'origine de $\tilde{e}_i$ est dans $\tilde{T}$ (cf. (0.5.3)).

(1.2) Soient $e_1, \ldots, e_g$ les arêtes de τ telles que pour tout $i = 1, \ldots, g$, l'origine de e_i soit un sommet de T et que $u(e_i)$ soit égal à $\tilde{e}_i$.

(1.3) Pour tout $i = 1, \ldots, g$, puisque $u(t(e_i)) = t(\tilde{e}_i)$ appartient à $\mathrm{som}(\tilde{T})$, il existe $\gamma_i \in \Gamma$ tel que $\gamma_i(t(e_i)) \in \mathrm{som}(T)$. Soit G les sous-groupe de Γ engendré par $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$.

(1.4) Théorème. (1) *Le sous-groupe G de Γ est libre de rang g, $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$ en est une base.*
(2) *Par l'homomorphisme canonique $\Gamma \to \bar{\Gamma}$ (cf. (0.3.1)), G a pour image $\bar{\Gamma}$.*
(3) *L'homomorphisme $G \subset \Gamma \xrightarrow{\text{can.}} \Gamma/\Gamma_{tors}$ est un isomorphisme.*
(4) *Le groupe Γ est le produit semi-direct de G et de Γ_{tors}.*

Démonstration. Montrons que G est libre, de base $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$. Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ des éléments de G tels que: $\alpha_0 = \alpha_N = \mathrm{id}$, et pour tout n, $1 \leqq n \leqq N$, il existe $i_n \in \{1, \ldots, g\}$, il existe $\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ satisfaisant aux relations suivantes:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1}\gamma_{i_n}^{\varepsilon_n} \quad \text{et} \quad \gamma_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}\gamma_{i_n}^{\varepsilon_n} \neq \mathrm{id} \quad (2 \leqq n \leqq N).$$

Remarquons que les arbres $\alpha_{n-1}(T)$ et $\alpha_n(T)$ sont reliés par une arête, notée a_n, vérifiant (cf. (1.2))

$$a_n = \alpha_{n-1}(-e_{i_n}) \quad \text{si} \quad \alpha_n = \alpha_{n-1}\gamma_{i_n}$$

ou bien

$$a_n = \alpha_{n-1}(e_{i_n}) \quad \text{si} \quad \alpha_n = \alpha_{n-1}\gamma_{i_n}^{-1}.$$

On a donc le sous-arbre suivant de τ:

$$T = \alpha_0(T) \xrightarrow{a_1} \alpha_1(T) \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} \alpha_n(T) \xrightarrow{a_{n+1}} \cdots \xrightarrow{a_N} \alpha_N(T) = T.$$

Tout chemin joignant deux sommets de $\alpha_0(T)$ et $\alpha_N(T)$ respectivement possède donc un aller-retour, par conséquent, il existe n tel que a_n ou bien a_{n+1} soit une arête de $\alpha_n(T)$; ceci donne une contradiction car les $\tilde{e}_i = u(e_i)$ ne sont pas des arêtes de $\tilde{T} = u(T)$. Donc, $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ n'existent pas et G est libre de base $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$.

Les points (2), (3) et (4) du théorème sont plus longs à établir.

(1.5) Soit P l'image inverse par u de la réunion $\tilde{P}$ des pointes de $\Gamma\backslash\tau$ (cf. (0.5.1) et (1.1)) et soit τ' le sous-arbre de τ complémentaire de P. *Le groupe Γ opère sur τ', cette action restreinte à G est libre.* En effet, s'il existe une arête ou un sommet de τ' stable sous l'action d'un élément γ de G, il en est de même dans τ, par suite γ est de torsion, donc $\gamma = \mathrm{id}$.

(1.6) *On a les morphismes suivants de graphes:*

$$\tau' \xrightarrow{v} G\backslash\tau' \xrightarrow{w} \Gamma\backslash\tau' = (\Gamma\backslash\tau)^\circ \subset \Gamma\backslash\tau,$$

les applications v et $w \circ v$ étant les surjections canoniques.

Nous allons décomposer $G\backslash\tau'$ comme nous l'avons fait pour $\Gamma\backslash\tau$.

(1.7) *On a*

$$G\backslash\tau' = (G\backslash\tau')^\circ \cup \Big(\bigcup_{e\in E} P_e\Big)$$

où $(G\backslash\tau')^\circ = v(T \cup \{\pm e_1, \ldots, \pm e_g\})$ (*cf.* (1.2)) *est isomorphe à* $(\Gamma\backslash\tau)^\circ$ *par* w (cf. (1.6));

où E est l'ensemble des arêtes de $G\backslash\tau'$ qui ne sont pas des arêtes de $(G\backslash\tau')^\circ$ et dont les origines sont des sommets de $(\Gamma\backslash\tau)^\circ$;

où les P_e sont des sous-arbres connexes de $G\backslash\tau'$ tels que

- *e est une arête de P_e, $o(e)$ est un sommet terminal de P_e;*
- *P_e n'a pas d'arête commune avec $(G\backslash\tau')^\circ$ et avec les $P_{e'}$, $e' \in E$ et $e' \neq e$;*
- *P_e n'a qu'un seul sommet commun avec $(G\backslash\tau')^\circ$, c'est $o(e)$;*
- *si e_1 et e_2 sont deux éléments distincts de E, alors*
  -si $o(e_1) \neq o(e_2)$, P_{e_1} et P_{e_2} sont disjoints,
  -si $o(e_1) = o(e_2)$, P_{e_1} et P_{e_2} ont un seul sommet en commun, qui est $o(e_1) = o(e_2)$.

La démonstration de ceci est immédiate: il est clair que $(G\backslash\tau')^\circ$ est isomorphe à $(\Gamma\backslash\tau)^\circ$ par w; son complémentaire dans $G\backslash\tau'$ est un arbre, les P_e en sont une décomposition suivant ses arêtes d'origines dans $(G\backslash\tau')^\circ$.

(1.8) *Soit e une arête dans E (cf. (1.7)), soit e' une arête de τ' telle que $v(e') = e$ et que $o(e')$ soit un sommet de T (cf. (1.6)). Alors il existe $\alpha_{e'} \in \Gamma$, de torsion, tel que $\alpha_{e'}(e')$ soit une arête de $T \cup \{\pm e_1, \ldots, \pm e_g\}$.*

En effet, comme $w \circ v(\tau') = (\Gamma\backslash\tau)^\circ$, il existe $\alpha_{e'} \in \Gamma$ tel que $\alpha_{e'}(e')$ soit une arête de $T \cup \{\pm e_1, \ldots, \pm e_g\}$. On a nécessairement $o(\alpha_{e'}(e')) = o(e')$, donc $\alpha_{e'}$ est de torsion.

(1.9) Lemme. *Soit $G' = \langle G; \alpha_{e'}/v(e') \in E \rangle$ le sous-groupe de Γ engendré par G et les $\alpha_{e'}$, $v(e') \in E$. Alors on a*

$$G' \backslash \tau' = (\Gamma \backslash \tau)^{\circ}.$$

Preuve. Soit T' un sous-arbre connexe de τ' qui relève l'arbre maximal $\left(v(T) \cup \left(\bigcup_{e \in E} P_e\right)\right)$ de $G \backslash \tau'$ (cf. (1.1) et (1.6)); on peut supposer que T' contient T. Soit P'_e le sous-arbre de T' au dessus de P_e, $e \in E$.

Etant donné une arête a et un ensemble A d'arêtes de T', on pose

$$l(a, A) = \min \{l(a, b)/\mathrm{b} \in A\},$$

où $l(a, b)$ désigne le nombre d'arêtes de l'unique géodésique $L(a, b)$ de T' allant de $o(a)$ à $t(b)$.

Soit $A = G.\mathrm{ar}(T \cup \{\pm e_1, \ldots, e_g\})$ l'orbite sous l'action de G de l'ensemble des arêtes de $T \cup \{\pm e_1, \ldots, \pm e_g\}$. Soit $e \in E$ et soit a une arête de P'_e. Le nombre $l(a, A)$ est réalisé par une géodesique $L(a, e')$ (cf. (1.8); $L(a, A)$ est le «plus court chemin» de a à A); comme $\alpha_{e'}(L(a, e'))$ contient $\alpha_{e'}(e')$, qui est une arête de $T \cup \{\pm e_1, \ldots, \pm e_g\}$, on a

$$l(\alpha_{e'}(a), A) < l(a, A).$$

En répétant un nombre fini de fois ce raisonnement, on voit qu'il existe $g' \in G'$ tel que $g'(a)$ soit dans A.

Fin de la démonstration du thèoréme (1.4). Il résulte de (1.9) que pour toute arête a de τ' on a $G'.a = \Gamma.a$. Par suite, pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe $g \in G'$ tel que $\gamma(a) = g(a)$; il vient que $g^{-1}\gamma$ est de torsion. Il en résulte (2) car par l'application canonique $\Gamma \to \bar{\Gamma}$, l'image de G' est $\bar{\Gamma}$, mais cette image est aussi celle de G. Il en résulte aussi que l'homorphisme $G' \subset \Gamma \xrightarrow{\text{can.}} \Gamma/\Gamma_{\text{tors}}$ est surjectif; comme $\Gamma/\Gamma_{\text{tors}}$ est libre de rang g ([15], p. 77, coroll. 1), il vient (3). L'assertion (4) résulte de (3).

(1.10) Définition. L'ensemble $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$ d'éléments de Γ défini en (1.3) s'appelle une base géométrique de Γ.

Ce vocabulaire vient de ce que l'on pourrait transporter dans Ω la construction de $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$, parce-qui l'arbre τ est isomorphe a celui de la réduction analytique de Ω associee au recouvrement pur $(D_i)_{i \in I}$ (cf. [2], [5] ch. 5, [8] (1.5.4)).

2. Sur les revêtements de Schottky. Soient Γ un sous groupe arithmétique de $GL_2(K)$ et $\bar{M}_\Gamma$ la courbe modulaire associée. C'est une courbe de Mumford à l'∞, c'est à dire qu'il existe un sous-espace analytique Ξ de $\mathbb{P}^1_C$ de complémentaire L, compact, à intérieur vide, il existe un sous-groupe de Schottky (c'est à dire discontinu, libre, de type fini) G de $GL_2(C)$, à g générateurs (le genre de $\bar{M}_\Gamma$), tels que l'on ait un isomorphisme de C-espaces analytiques $\bar{M}_\Gamma \cong G \backslash \Xi$ ([11], [9] ch. 1 (1.6) et (3.1), ch. 4 (3.10) et ch. 5 § 5).

(2.1) Définition. On dira que le couple (Ξ, G) est un revêtement de Schottky de $\bar{M}_\Gamma$.

Nous allons montrer que pour le groupe G du théorème (1.4) et pour $\Xi = \Gamma_{\text{tors}} \backslash (\Omega \cup \mathbb{P}^1_C(K))$, (Ξ, G) est un revêtement de Schottky de $\bar{M}_\Gamma$ (th. (2.7)).

(2.2) Lemme. *Pour $l \in |K^*|$ soit (cf. (0.2.3))*

$$\Omega_l = \{z \in \Omega / |z|_i \geqq l\}.$$

Alors il existe $l_0 \in |K^*|$ tel que, pour tout $l \geqq l_0$ et tout $\gamma \in \Gamma$, si $\gamma(\Omega_l) \cap \Omega_l \neq \emptyset$, alors $\gamma \in \Gamma_\infty$ et $\gamma(\Omega_l) = \Omega_l$, où Γ_∞ est le stabilisateur dans Γ de la pointe à l'∞.

Pour la démonstration voir [6] §(3.2.17) ou encore [10].

(2.3) Soit $\{s_1, \ldots, s_r\}$ un système de représentants de $\Gamma \backslash \mathbb{P}^1(K)$, c'est à dire des pointes de Γ. Notons R la réduction analytique de Ω associée au recouvrement $(D_i)_{i \in I}$ (cf. (0.2)), soit P_{s_j} une demi-droite de τ représentant la pointe s_j. Par R, l'isomorphisme entre le graphe d'intersection de $R(\Omega)$ et τ ([8], (1.5.4)) et le lemme (2.2) (car $GL_2(K)$ opère transitivement sur $\mathbb{P}^1(K)$), on voit qu'il existe des sous-espaces analytiques connexes Ω_{s_j} de Ω, $1 \leqq j \leqq r$, qui sont des réunions (infinies) de couronnes D_i et possédant les propriétés suivantes:

(2.3.1) par R et l'isomorphisme entre le graphe d'intersection de $R(\Omega)$ et τ, Ω_{s_j} donne P_{s_j} moins un nombre fini d'arêtes, $1 \leqq j \leqq r$;

(2.3.2) pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tous $j, j' = 1, \ldots, r$, si $\gamma(\Omega_{s_j}) \cap \Omega_{s_{j'}} \neq \emptyset$, alors $j = j'$, $\gamma(\Omega_{s_j}) = \Omega_{s_j}$ et $\gamma \in \Gamma_{s_j}$, où Γ_{s_j} désigne le stabilisateur dans Γ de $s_j \in \mathbb{P}_1(K)$.

Pour toute pointe $s \in \mathbb{P}_1(K)$, soient $\gamma \in \Gamma$ et $j \in \{1, \ldots, r\}$ tels que $s = \gamma(s_j)$.

(2.3.3) On pose $\Omega_s = \gamma(\Omega_{s_j})$. On a

(2.3.4) pour tous s et s', si $\Omega_s \cap \Omega_{s'} \neq \emptyset$, alors il existe $\gamma \in \Gamma_{\text{tors}}$ tel que $\gamma(s) = s'$ et $\gamma(\Omega_s) = \Omega_{s'}$.

(2.4) Lemme. *Soit $s \in \mathbb{P}_1(K)$. Alors les morphismes C-analytiques canoniques $g_1: \Omega \to \Gamma_{\text{tors}} \backslash \Omega$ et $g: \Omega \to \Gamma \backslash \Omega$ induisent respectivement deux plongements ouverts $\alpha_1: \Gamma_s \backslash \Omega_s \hookrightarrow \Gamma_{\text{tors}} \backslash \Omega$ et $\alpha: \Gamma_s \backslash \Omega_s \hookrightarrow \Gamma \backslash \Omega$; si g_2 désigne le morphisme canonique $\Gamma_{\text{tors}} \backslash \Omega \to \Gamma \backslash \Omega$ (qui vérifie $g_2 \circ g_1 = g$), on a $g_2 \circ \alpha_1 = \alpha$; $\Gamma_s \backslash \Omega_s$ est analytiquement isomorphe au disque pointé $D(0, 1) - \{0\}$, où $D(0, 1) = \{z \in C / |z| \leqq 1\}$; $\Xi_s \overset{\text{déf.}}{=} (\Gamma_s \backslash \Omega_s) \cup \{s\}$ est un espace analytique isomorphe au disque $D(0, 1)$.*

(2.4.1) Remarque. Dans la suite on confondra $\Gamma_s \backslash \Omega_s$ avec ses images dans $\Gamma_{\text{tors}} \backslash \Omega$ et dans $\Gamma \backslash \Omega$.

Pour la démonstration voir [6] §(3.2.17) ou encore [10].

Il résulte de (2.3) et (2.4) que si s et s' sont deux éléments de $\mathbb{P}_1(K)$ tels que, dans $\Gamma_{\text{tors}} \backslash \Omega$ (cf. (2.4.1)), on ait $\Gamma_s \backslash \Omega_s \cap \Gamma_{s'} \backslash \Omega_{s'} \neq \emptyset$, alors s et s' sont dans la même orbite sous Γ_{tors} et $\Gamma_s \backslash \Omega_s = \Gamma_{s'} \backslash \Omega_{s'}$; d'où la définition suivante (en faisant l'abus de notation consistant à confondre $\Gamma_{\text{tors}} \backslash \mathbb{P}_1(K)$ avec l'un de ses systèmes de représentants):

(2.5) Définition. On désigne par Ξ l'espace analytique sur C

$$\Xi = (\Gamma_{\text{tors}} \backslash \Omega) \cup \Big(\bigcup_{s \in \Gamma_{\text{tors}} \backslash \mathbb{P}^1(K)} \Xi_s \Big)$$

obtenu en collant chaque Ξ_s à $\Gamma_{\mathrm{tors}}\backslash\Omega$ par leur sous-espace commun $\Gamma_s\backslash\Omega_s$ (cf. (2.4) et (2.4.1)). On notera $f: \Omega \to \Gamma_{\mathrm{tors}}\backslash\Omega \subset \Xi$ le morphisme canonique de C-espaces analytiques résultant de la définition de Ξ.

(2.5.1) Remarque. Il résulte de (2.4) un plongement canonique $\Gamma_s\backslash\Omega_s \hookrightarrow \Xi$. On confondra ici aussi $\Gamma_s\backslash\Omega_s$ avec son image dans Ξ.

(2.6) Lemme.

(2.6.1) *Le sous-groupe G de Γ (cf. (1.3) et (1.4)) opère librement sur Ξ (car Γ_{tors} est normal dans Γ) et cette action est discontinue* ([9], (1.3), *p.* 4).

(2.6.2) *Soit $\{D_i/i \in I'\}$ le sous-ensemble de $\{D_i/i \in I\}$ formé des D_i qui ne sont inclus dans aucun Ω_s, $s \in \mathbb{P}_1(K)$ (cf.* (0.2)). *Alors (cf.* (2.5))

$$\{f(D_i)/i \in I'\} \cup \{\Xi_s/s \in \Gamma_{\mathrm{tors}}\backslash\mathbb{P}^1(K)\}$$

est un recouvrement admissible pur de Ξ.

(2.6.3) *Le recouvrement pur de Ξ donné en* (2.6.2) *est compatible avec l'action de G sur Ξ et permet de munir $G\backslash\Xi$ d'une structure de C-espace analytique: soit h le morphisme canonique $\Xi \to G\backslash\Xi$, alors, pour tout élément V du recouvrement de* (2.6.2), *V et $h(V)$ sont analytiquement isomorphes.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de ce qui précède, en particulier, pour (2.6.2) de (2.3) et pour (2.6.3) du fait que G n'a pas de torsion.

(2.7) Théorème. *Le couple (Ξ, G) est un revêtement de Schottky de $\bar{M}_\Gamma$ (cf.* (2.1)). *Plus précisément, on a le diagramme commutatif suivant d'espaces et de morphismes analytiques sur C*

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \Xi \arrow[d, "h"] \\
\Gamma\backslash\Omega \arrow[r, hook] \arrow[d, "\|"'] & G\backslash\Xi \arrow[d, "\wr"] \\
M_\Gamma \arrow[r, hook] & \bar{M}_\Gamma
\end{tikzcd}$$

où f est défini en (2.5), *g en* (2.4), *h est le morphisme canonique et où $\Gamma\backslash\Omega \hookrightarrow G\backslash\Xi$ ainsi que $\bar{M}_\Gamma \hookrightarrow M_\Gamma$ sont des plongements ouverts.*

Démonstration. Elle emprunte quelques idées à celle du théorème (3.3) de [12]. Du théorème (1.4) et du lemme (2.4) on déduit facilement l'existence d'un plongement ouvert $\bar{f}: \Gamma\backslash\Omega \hookrightarrow G\backslash\Xi$ tel que $\bar{f} \circ g = h \circ f$. En constatant que pour toute pointe s de Γ, les ouverts analytiques $\Gamma_s\backslash\Omega_s$ de $\Gamma\backslash\Omega$ et $G\backslash\Xi$ (cf. (2.4.1) et (2.5.1)), sont isomorphes par $\bar{f}$, on voit facilement que $\bar{f}$ se prolonge à $\bar{M}_\Gamma$ pour donner un isomorphisme $\bar{M}_\Gamma \cong G\backslash\Xi$.

Il reste à prouver qu'il existe un plongement $\Xi \hookrightarrow \mathbb{P}^1(C)$ qui fasse de Ξ un sous-espace analytique de $\mathbb{P}^1(C)$ de complémentaire, noté L, compact, tel que de plus l'action de G sur Ξ se prolonge pour donner l'action uselle de $GL_2(C)$ sur $\mathbb{P}^1(C)$, tel que enfin Ξ soit l'ensemble des points réguliers pour cette action de G sur $\mathbb{P}^1(C)$.

(2.7.1) Le graphe $\Gamma_{\text{tors}}\backslash\tau$ est un arbre ([15], cor. 1, p. 77) et le graphe d'intersection de la réduction analytique de Ω associée à $(D_i)_{i\in I}$ est isomorphe à τ ([8] (1.5.4)); on en déduit facilement que le graphe d'intersection de la réduction analytique de Ξ, pour le recouvrement de (2.6.2), s'obtient en contractant des demi-droites de $\Gamma_{\text{tors}}\backslash\tau$ (voir [15], p. 34, 35), c'est donc un arbre.

(2.7.2) Il résulte de (2.7.1) et (2.6.2) que Ξ est un espace analytique de genre zéro ([9], p. 138) et qu'il existe un plongement $\Xi \hookrightarrow \mathbb{P}^1(C)$ (op. cit. (2.4) p. 144). Alors $L = \mathbb{P}^1(C) - \Xi$ est compact car, d'aprés op. cit. (2.5), p. 145, cela résulte du fait que les fonctions analytiques bornées sur Ξ sont constantes (et ceci est évident, en passant par f). Avec op. cit. (3.8), p. 152, on voit ensuite que l'action de G sur Ξ se prolonge à $\mathbb{P}^1(C)$ et devient celle de $GL_2(C)$.

Comme G est libre, de type fini, qu'il agit de manière discontinue sur Ξ, G est un groupe de Schottky. Il reste à prouver que L est l'ensemble des points limites de G. Soit M cet ensemble. On a $M \subseteq L$ (car les points de Ξ sont réguliers sous l'action de G), d'où un morphisme analytique injectif $G\backslash\Xi \hookrightarrow G\backslash(\mathbb{P}^1(C) - M)$ entre deux courbes complètes et non singulières, c'est donc un isomorphisme.

Bibliographie

[1] S. BOSCH, U. GÜNTZER and R. REMMERT, Non archimedean Analysis. Berlin-Heidelberg-New York 1984.

[2] P. DELIGNE and D. HUSEMÖLLER, Survey of Drinfeld Modules. Contemp. Math. **67**, 25–91 (1987).

[3] V. G. DRINFELD, Elliptic Modules (russian). Math. Sb. **94**, 594–627 (1974) English translation: Math. USSR-Sb. **23**, 561–592 (1976).

[4] G. FALTINGS, Semi-stable vector Bundles on Mumford Curves. Invent. Math. **73**, 199–212 (1983).

[5] J. FRESNEL et M. VAN DER PUT, Géométrie analytique rigide et applications. Progr. Math. **18** (1981).

[6] E.-U. GEKELER, Drinfeld-Moduln und modulare Formen über rationalen Funktionenkörpern. Bonner Math. Schriften **119** (1980).

[7] E.-U. GEKELER, Drinfeld modular Curves. LNM **1231**, Berlin-Heidelberg-New York 1986.

[8] E.-U. GEKELER and M. REVERSAT, Jacobians of Drinfeld modular Curves. A paraître au J. Reine Angew. Math.

[9] L. GERRITZEN and M. VAN DER PUT, Schottky Groups and Mumford Curves. LNM **817**, Berlin-Heidelberg-New York 1980.

[10] D. GOSS, π-adic Eisenstein Series for Function Fields. Compositio Math. **41**, 3–38 (1980).

[11] D. MUMFORD, An analytic Construction of degenerating Curves over complete local Fields. Compositio Math. **24**, 129–174 (1974).

[12] M. VAN DER PUT, Discrete Groups, Mumford Curves and theta Functions. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), **1**, 399–435 (1992).

[13] M. VAN DER PUT et M. REVERSAT, Fibrés vectoriels semi-stables sur une Courbe de Mumford. Math. Ann. **273**, 573–600 (1986).

[14] M. Reversat, Lecture on rigid Geometry. The Arithmetic of Function Fields; D. Goss, D. H. Hayes, M. I. Rosen eds., Berlin-New York 1992.
[15] J.-P. Serre, Arbres, Amalgames, SL_2. Astérisque **46** (1977).

Eingegangen am 12. 7. 1995*)

Anschrift des Autors:

Marc Reversat
Laboratoire de Mathématiques
Emile Picard (U.M.R.)
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
F-31062 Toulouse

*) Eine Neufassung ging am 18. 10. 1995 ein.